Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Betrachten Sie den Raum von $m \times n$ Matrizen $\mathbb{R}^{m\times n}$, und die Funktionen $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\|A\| := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Lösung Vorüberlegungen:

Ax ist ein Vektor der Länge m, weswegen $\|Ax\|$ die Vektornorm ist. Ebenso ist $\|x\|$ die Norm eines Vektors der Länge n. Dies soll nicht verwechselt werden mit der Matrixnorm $\|A\|$. Um die beiden Normen in dieser Aufgabe auseinander halten zu können schreiben wir

für Matrizen: $\|A\|_{m\times n}$ und für Vektoren: $\|x\|_n$ bzw. $\|Ax\|_m$.

Also gilt:

$$\|Ax\|_m = \| \left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \quad \cdots \quad , \sum_{j=1}^n a_{m,j}x_j \right) \|_m.$$

Aus der positiven Definitheit der Vektornorm folgt, dass $x = 0 \Leftrightarrow \|x\|_n = 0$.

(a):

Um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_{m\times n}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist, müssen wir die Norm-Eigenschaften (N1) - (N4) aus *Erinnerung 1.1* überprüfen.

(N1) zz. $\|A\|_{m\times n} \geq 0 \ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebig, dann gilt:

$$\|Ax\|_m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ \Omega\subseteq\mathbb{R}^n \ bel.}} \|Ax\|_m \geq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} \geq 0 \Leftrightarrow \|A\|_{m\times n} \geq 0.$$

(N2) (positiv definitit) zz. $A = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n} \Leftrightarrow \|A\|_{m\times n}\ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebig, dann gilt:

$$A = 0 \in \mathbb{R}^{m\times n} \Leftrightarrow Ax = 0 \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$\Leftrightarrow \|Ax\|_m = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \|A\|_{m\times n} = 0.$$

(N3) (Homogenität) zz. $\|\lambda A\|_{m\times n} = |\lambda|\|A\|_{m\times n}\ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebig, dann gilt:

$$\|\lambda A\|_{m\times n} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|\lambda Ax\|_n = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} |\lambda|\|Ax\|_n = |\lambda| \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|Ax\|_n = |\lambda|\|A\|_{m\times n}.$$

(N4) (Dreiecksungleichung) zz. $\|A+B\|_{m\times n} \leq \|A\|_{m\times n} + \|B\|_{m\times n}\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|A+B\|_{m\times n} &= \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|(A+B)x\|_n = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|Ax+Bx\|_m \\ &\overset{\triangle-UGL \text{ von } \|\cdot\|_n}{\leq} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} (\|Ax\|_m + \|Bx\|_m) \\ &\overset{(\clubsuit)}{\leq} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|Ax\|_m + \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|Bx\|_m = \|A\|_{m\times n} + \|B\|_{m\times n}.\end{aligned}$$

Vergleiche Ungleichung ($\clubsuit$) mit der Dreiecksungleichung einer Sup-norm.
Wir haben also gezeigt, dass $\|\cdot\|_{m\times n}$ eine Norm ist.

(b):

$$\|A\|_{m\times n} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \|Ax\|_m \overset{\|x\|_n=1}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n,\\ \|x\|_n=1}} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} \tag{1}$$

Sei $0 \neq y \in \mathbb{R}$ und $\frac{1}{\|y\|_n} \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\|y\cdot\frac{1}{\|y\|_n}\|_n = 1$ und wir können (1) umschreiben zu:

$$(1) = \sup_{\substack{0\neq y\in\mathbb{R}^n,\\ \lambda:=\frac{1}{\|y\|_n}}} \frac{\|A\lambda y\|_m}{\|\lambda y\|_n} = \sup_{\substack{0\neq y\in\mathbb{R}^n,\\ \lambda:=\frac{1}{\|y\|_n}}} \frac{|\lambda|\|Ay\|_m}{|\lambda|\|y\|_n} = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n,\\ y\neq 0}} \frac{\|Ay\|_m}{\|y\|_n}$$

Damit ist die zweite Darstellungsform der Matrixnorm bewiesen.

T2. Berechnen Sie die Hessematrix der folgenden Funktionen im Punkt 0.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2\cos(y) + y\sin(x)$,

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y,z) = z^4 + x^3y + x^2 + xy + xz + \frac{1}{2}y^2 + 2z^2$.

Lösung Vorüberlegungen:

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq$ offen und zwei mal stetig partiell differenzierbar. Nach Definition 2.39 ist die Hessematrix der Funktion f in $x \in U$ definiert als

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Außerdem ist die Hessematrix nach *Bemerkung* 2.40 symmetrisch, wenn die Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Dies ist bei (a) und (b) der Fall.

(a):

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} 2x\cos(y) + y\cos(x) = 2\cos(y) - y\sin(x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \sin(x) - x^2\sin(y) = -x^2\cos(x)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} 2x\cos(y) + y\cos(x) = \cos(x) - 2x\sin(y)$

$$\Rightarrow H_f(x) = \begin{pmatrix} 2\cos(y) - y\sin(x) & cos(x) - 2x\sin(y) \\ \cos(x) - 2x\sin(y) & -x^2\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_f(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b):

$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2y + 2x + y + z = 6x + 2$

$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} x^3 + x + y = 1$

$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} 4z^3 + x + 4z = 12z^2 + 4$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2y + 2x + y + z = 3x^2 + 1$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} 4z^3 + x + 4z = 1$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} = x^3 + x + y = 0$

$$\Rightarrow H_g(x) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 3x^2+1 & 1 \\ 3x^2+1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 12z^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H_g(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

T3. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass in 0 alle Richtungsableitungen $D_v f(0)$, $v \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, existieren, aber dass im Allgemeinen $\left\langle \bigtriangledown f(0), v \right\rangle = D_v f(0)$ nicht gilt.

Lösung Vorüberlegungen:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x \in U$ und $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. So existiert nach Definition 2.30 die **Richtungsableitung an der Stelle** x **in Richtung** v, wenn die Grenzwert

$$D_v f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot v) - f(x)}{h},$$

existiert, also eindeutig ist.

Beweis:

Sei also $x = 0 \in \mathbb{R}^2$ und die zweidimensionale Richtung $v = (v_1, v_2)$ beliebig aus $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot v) - f(x)}{h} \\ &\overset{x=0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + (h \cdot v_1, h \cdot v_2)) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 \cdot v_2^3}{h^2 \cdot v_1^2 + h^2 \cdot v_2^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 \frac{v_2^3}{h^2(v_1^2+v_2^2)} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^3} \frac{v_2^3}{h^2(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_2^3}{(v_1^2 + v_2^2)} = f(v) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $v \in R^2 \backslash \{0\}$ beliebig gewählt war, existieren also alle Richtungsableitungen.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left. \frac{\mathrm{d} f(x,0)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \left. \frac{\mathrm{d} f(0,y)}{\mathrm{d}y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y \right|_{y=0} = 1.$$

Somit ergibt sich für den Gradienten: $\bigtriangledown f(0) = (0,1)$.

$$\left\langle \bigtriangledown f(0), v \right\rangle = v_2 \neq f(v) = D_v f(x)$$

$$\text{Zum Beispiel für } v = (1,1): \quad \left\langle \bigtriangledown f(0), v \right\rangle = 1 \neq \frac{1}{2} = f(v) = D_v f(x).$$

Im Allgemeinen gilt also keine Gleichheit.